CONCOURS A 1988 — Régime Général — EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures — Coefficient : 5

I - EXERCICE

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice associée $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Question 1

a) Montrer par la méthode du pivot de Gauss que A admet une factorisation du type L.U où L est triangulaire inférieure unipotente et U triangulaire supérieure.

b) Calculer A^{-1}

Question 2

a) Montrer que A admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 (on note λ_1 la plus grande des deux).
Préciser E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés à λ_1 et λ_2

b) Montrer qu'il existe des bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$ formées de vecteurs propres de A, en donner une et écrire la matrice de f dans cette base.

II - PROBLEME

(A) Question 1

1) Etudier rapidement la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow 2 - t - 2e^{-t}$

2) En déduire que l'équation

(E) $\quad 2 - t - 2e^{-t} = 0$

admet deux solutions dont une strictement positive.
Si a est cette solution vérifier l'inégalité $1,5 < a < 1,6$

Question 2

Soit u la suite réelle de terme général u_n définie par :

$u_0 = 1,5$

$u_{n+1} = 2\,(1 - e^{-u_n}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1. Montrer que la suite u est croissante, majorée et qu'elle converge vers a.

2) Montrer que pour tout élément t de l'intervalle

$[1,5 ; a[\qquad |e^{-t} - e^{-a}| < |t - a|\, e^{-\frac{3}{2}}$

3) Montrer que :

$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - a| = 2\,|e^{-u_n} - e^{-a}|$

puis en utilisant l'inégalité précédente montrer que :

$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - a| < (2.e^{-\frac{3}{2}})^n\, |u_0 - a|$

En déduire que :

$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - a| < \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2^n}$

T.S.V.P

4) p est un entier naturel non nul.
Déterminer un entier n_o tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_o \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{1}{10^p}$$

En déduire une valeur approchée de a à 10^{-2} près

(B) Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $t \longrightarrow \frac{t^2}{e^t - 1}$

1) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
On notera g ce prolongement.

2) a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad g'(t) = \frac{t.e^t}{(e^t-1)^2} h(t)$$

c) Etudier les variations de g. Montrer que g passe par un maximum absolu M égal à a(2-a)

3) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de g et sa tangente au point d'abscisse zéro.

Question 2

1) Montrer la convergence des intégrales suivantes :

$\int_o^{+\infty} t^2 e^{-pt} dt$ pour p entier naturel non nul

$\int_o^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt$ pour p entier naturel

2) k étant un entier naturel, on pose pour tout x réel positif

$$I_k(x) = \int_o^x t^2 e^{-(k+1)t} dt$$

et l'on note I_k la limite quand x tend vers $+\infty$ de $I_k(x)$

Calculer $I_k(x)$ à l'aide d'intégrations par parties et en déduire I_k

3) n est un entier naturel non nul, on pose pour tout x réel positif

$J_n(x) = \int_o^x g(t) e^{-nt} dt$ et l'on note J_n la limite de $J_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$

Montrer que : $o \leqslant J_n \leqslant \frac{M}{n}$

En déduire la limite de J_n quand n tend vers $+\infty$

4) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad g(t) = \sum_{k=o}^{n-1} t^2 e^{-(k+1)t} + g(t) e^{-nt}$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_o^{\infty} g(t)dt = \sum_{k=o}^{n-1} I_k + J_n$$

puis que

$$\int_o^{\infty} g(t)dt = 2 \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail